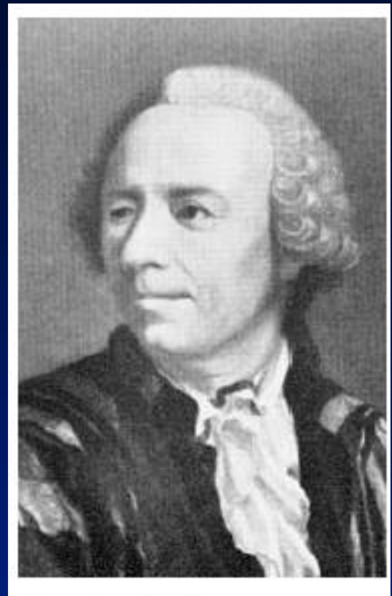
Senderos, rutas y circuitos

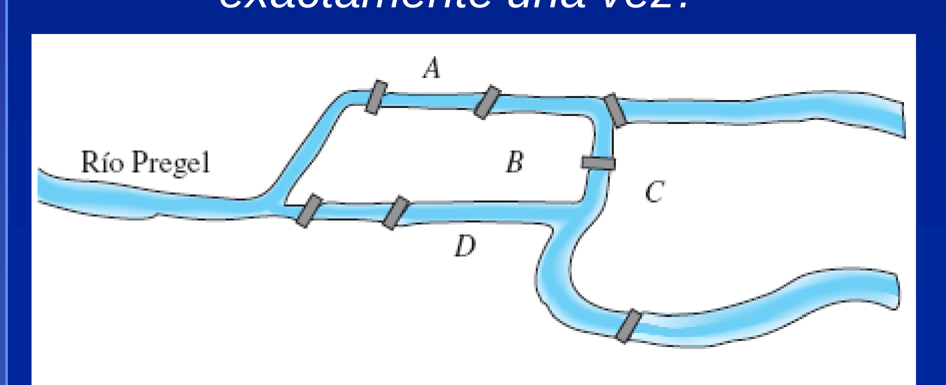


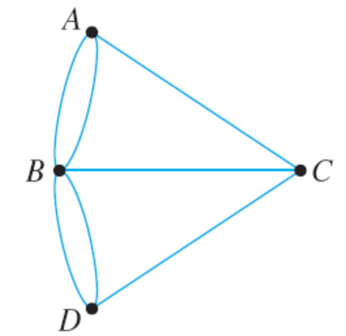
Leonhar Euler
(1707-1783)



10.2.1 Los siete puentes de Königsberg

- .Es posible encontrar una ruta en el grafo que comience y termine en algún vértice, uno de *A, B, C o D y que atraviese cada arista exactamente una vez?*





Versión en grafo del mapa de Königsberg

• Definición

Sea G un grafo y sean v y w vértices en G.

Un **camino de v a w** es una sucesión finita alternada de vértices adyacentes y aristas de G. Por tanto un camino tiene la forma

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots v_{n-1} e_n v_n,$$

donde las v representan vértices, las e representan aristas, $v_0 = v$, $v_n = w$ y para toda $i = 1, 2, \ldots n$, v_{i-1} y v_i son los puntos extremos de e_i. **El camino trivial de v a v** consiste del único vértice v.

Un **sendero de v a w** es un camino de v a w que no contiene una arista repetida.

Una **trayectoria de v a w** es un sendero que no contienen un vértice repetido.

Un **camino cerrado** es un camino que comienza y termina en el mismo vértice.

Un **circuito** es un camino cerrado que contiene al menos una arista y no contiene una arista repetida.

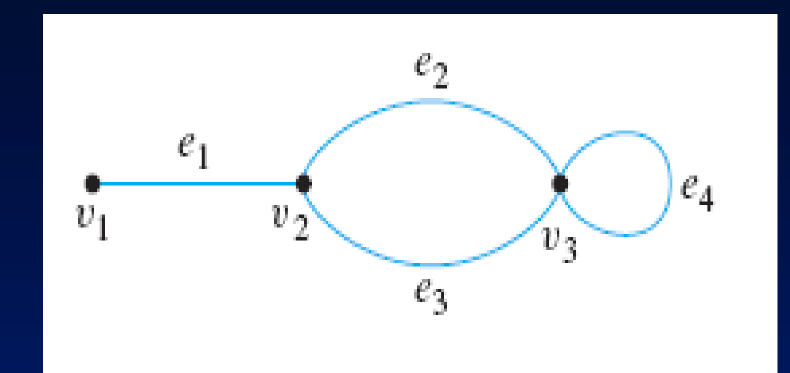
Un **circuito simple** es un circuito que no tiene cualquier otro vértice repetido excepto el primero y el último.

	¿Arista repetida?	¿Vértice repetido?	¿Inicia y finaliza en el mismo punto?	¿Debe contener al menos una arista?
Camino	permitido	permitido	permitido	no
Sendero	no	permitido	permitido	no
Trayectoria	no	no	no	no
Camino cerrado	permitido	permitido	sí	no
Circuito	no	permitido	sí	sí
Circuito simple	no	sólo primero y último	sí	sí

Caminos

- Notación

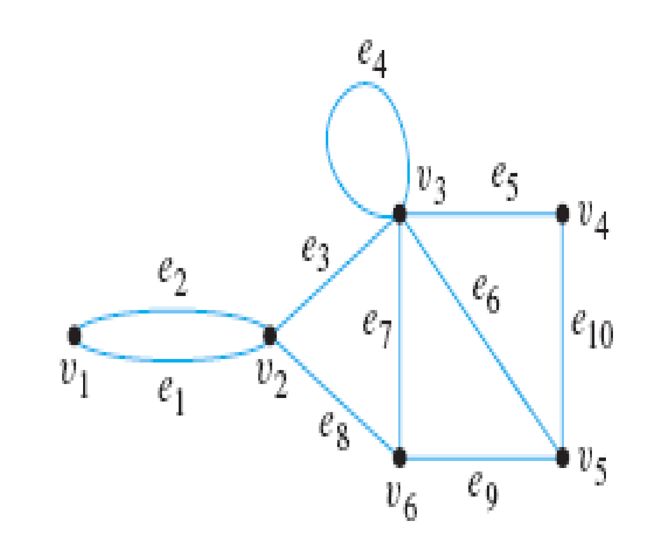
$v_1e_1v_2e_2v_3e_4v_3e_3v_2$



- En el grafo siguiente, determine cuales de los siguientes caminos son senderos, trayectorias, circuitos o circuitos simples

a. $v_1e_1v_2e_3v_3e_4v_3e_5v_4$
b. $e_1e_3e_5e_5e_6$
c. $v_2v_3v_4v_5v_3v_6v_2$
d. $v_2v_3v_4v_5v_6v_2$
e. $v_1e_1v_2e_1v_1$
f. v_1

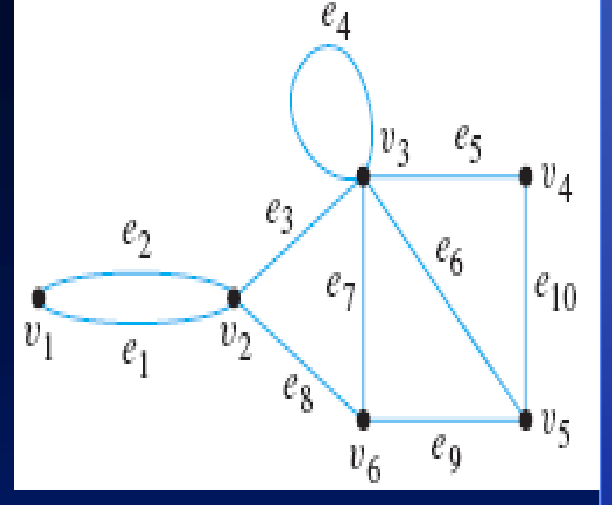
	¿Arista repetida?	¿Vértice repetido?	¿Inicia y finaliza en el mismo punto?	¿Debe contener al menos una arista?
Camino	permitido	permitido	permitido	no
Sendero	no	permitido	permitido	no
Trayectoria	no	no	no	no
Camino cerrado	permitido	permitido	sí	no
Circuito	no	permitido	sí	sí
Circuito simple	no	sólo primero y último	sí	sí



Solución

a. $v_1 e_1 v_2 e_3 v_3 e_4 v_3 e_5 v_4$ b. $e_1 e_3 e_5 e_5 e_6$ c. $v_2 v_3 v_4 v_5 v_3 v_6 v_2$

d. $v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_2$ e. $v_1 e_1 v_2 e_1 v_1$ f. v_1



- a. Este camino tiene un vértice repetido, pero no tiene una arista repetida, así que es un sendero de G1 a G4, pero no una trayectoria.
- b. Esto es sólo un camino de G1 a G5. No es un sendero porque tiene una arista repetida.
- c. Este camino comienza y termina en G2, contiene al menos una arista y no tiene una arista repetida, así que es un circuito. Ya que el vértice G3 se repite en medio, no es un circuito simple.
- d. Este camino empieza y termina en G2, contiene al menos una arista, no tiene una arista repetida y no tiene un vértice repetido. Por tanto es un circuito simple.
- e. Esto es sólo un camino cerrado comenzando y terminando en G1. No es un circuito porque se repite la arista e1.
- f. El primer vértice de este camino es el mismo que su último vértice, pero no contiene una arista y así no es un circuito. Es un camino cerrado de G1 a G1. (También es un sendero de G1 a G1).

Conceptos

- ***Conectividad***

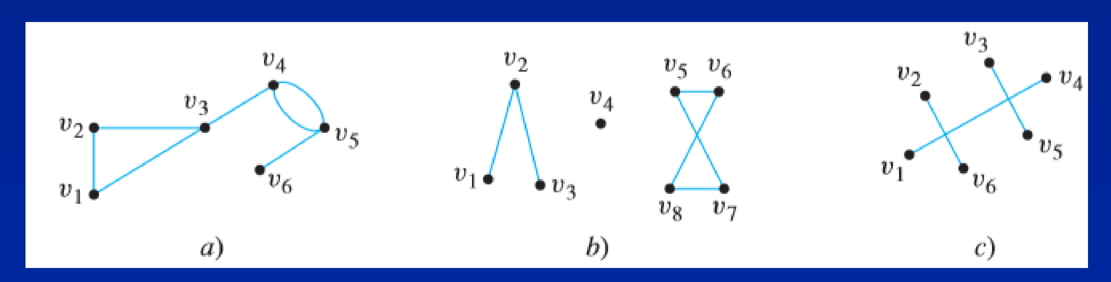
• Definición

Sea G un grafo. Dos vértices v y w **de** G **son conexos** si y sólo si, existe un camino de v a w. El **grafo** G **es conexo** si y sólo si, dados *cualesquiera* dos vértices v y w en G, hay que un camino de v a w. Simbólicamente,

$$G \text{ es conexo } \Leftrightarrow \forall \text{ vértices } u, w \in V(G), \exists \text{ un camino de } v \text{ a } w.$$

  - En forma negativa:
    - un grafo G no es conexo si y sólo si, hay dos vértices de G que no están conectados por cualquier camino

- ¿Cuáles de los siguientes grafos son conexos?



Conectividad

Lema 10.2.1

Sea G un grafo.

a. Si G es conexa, entonces cualesquiera dos vértices distintos de G pueden conectarse con una trayectoria.

b. Si los vértices v y w forman parte de un circuito en G y se quita una arista del circuito, entonces aún existe un sendero de v a w en G.

c. Si G es conexa y G contiene un circuito, entonces se puede eliminar una arista del circuito sin desconectar a G.

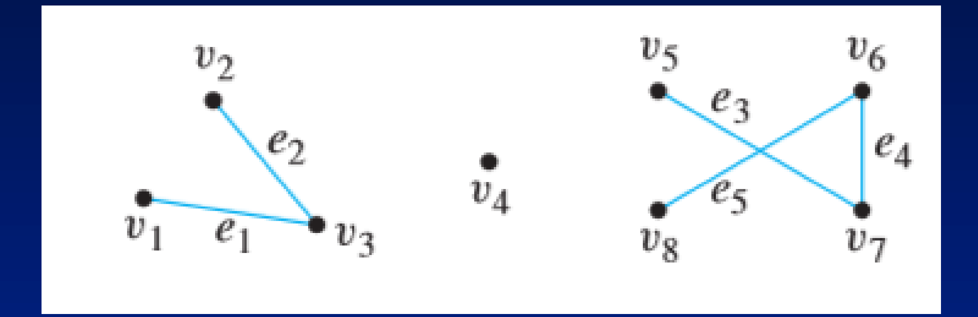
• Definición

Un grafo H es un **componente conexo** de una gráfica G si y sólo si,

1. H es subgráfica de G;
2. H es conexo; y
3. Un subgrafo no conexo de G tiene a H como un subgrafo y contiene vértices o aristas que no están en H.

Conectividad

- Encuentre todos los componentes conexos de la gráfica siguiente G.

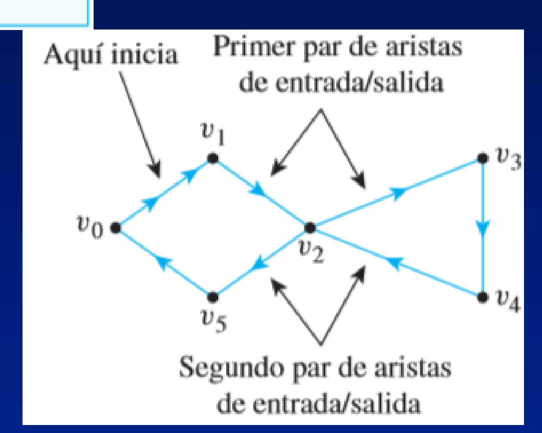


- Solución G tiene tres componentes conexos: H1, H2 y H3 con conjuntos de vértices V1, V2 y V3 y conjuntos de aristas E1, E2 y E3, donde
- V1 ={ v1,v2,v3}, E1 ={ e1,e2},
- V2 ={ v4}, E2 =∅ ,
- V3 ={ v5,v6,v7,v8}, E3 ={ e3,e4,e5}.

Circuito de Euler

• **Definición**

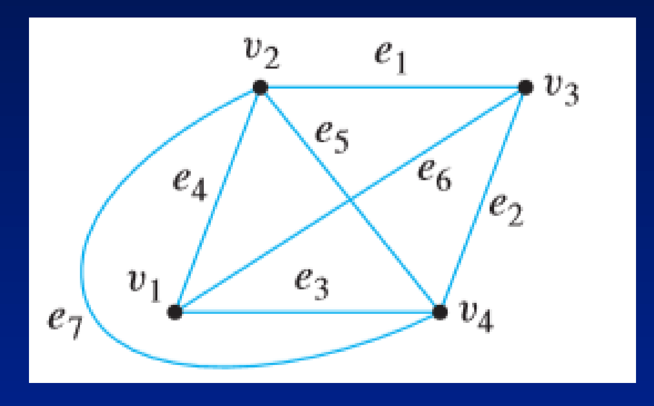
Sea *G* un grafo. Un **circuito de Euler** para *G* es un circuito que contiene cada vértice y cada arista de *G*. Es decir, un circuito de Euler para *G* es una sucesión de vértices adyacentes y aristas en *G* que tiene al menos una arista, que comienza y termina en el mismo vértice, utiliza cada vértice de *G* por lo menos una vez y cada arista de *G* exactamente una vez.



- Teorema 10.2.2
  - Si un grafo tiene un circuito de Euler, entonces todos los vértices del grafo tienen grado positivo par.
- Teorema 10.2.3
  - Si un grafo G es conexo y el grado de cada vértice de G es un entero positivo par, G tiene un circuito de Euler.
- Teorema 10.2.4
  - Un grafo G tiene un circuito de Euler si y sólo si, G es conexo y cada vértice de G tiene grado par positivo.

Ejercicio

- Demuestre que el grafo siguiente no tiene un circuito de Euler



- Solución
  - Los dos vértices V1 y V3 tienen grado 3, que es impar.
  - Por la forma contrapositiva del teorema 10.2.2, este grafo no tiene un circuito de Euler.

Sendero de Euler

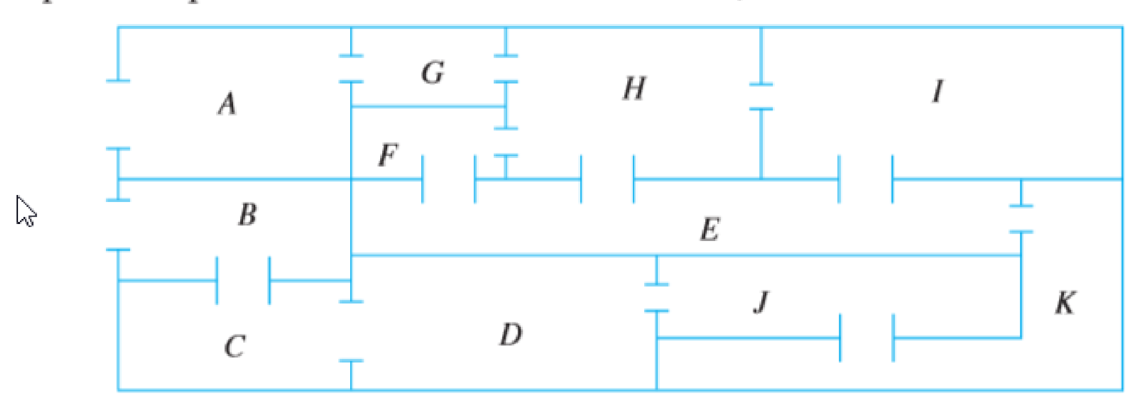
- **Definición**

Sea G un grafo y sean v y w dos vértices distintos de G. Un **sendero de Euler de v a w** es una sucesión de aristas adyacentes y vértices que comienza en v, termina en w, pasa a través de cada vértice de G por lo menos una vez y atraviesa cada arista de G exactamente una vez.

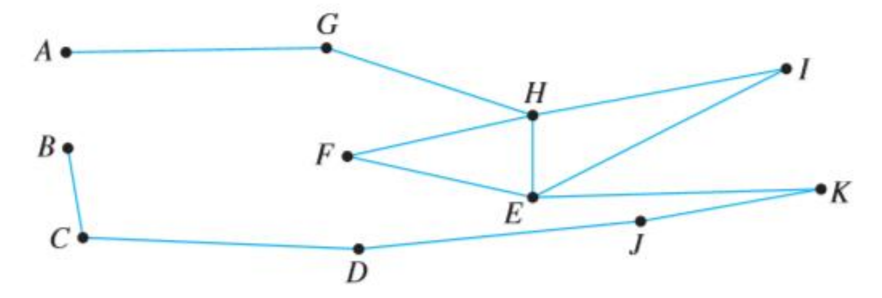
- Corolario 10.2.5
  - Sea G un grafo y sea G y H dos vértices distintos de G. Existe una trayectoria de Euler de G a H si y sólo si G es conexo, u y H tienen grado impar y todos los otros vértices de G tienen grado par positivo.

Ejercicio

El plano que se muestra a continuación es una casa abierta para vista del público. ¿Es posible encontrar un sendero que inicie en el cuarto A, termina en el cuarto B y pase exactamente una vez por cada puerta interior de la casa? Si es así, determine dicho sendero.



Solución Sea la planta de la casa representada por el grafo que se muestra a continuación.

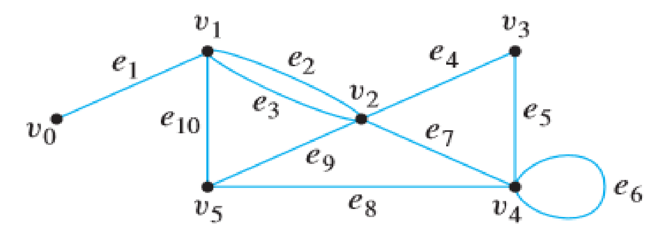


Cada vértice de este grafo tiene grado par excepto para A y B, cada uno de los cuales tiene grado 1. Por el corolario 10.2.5, existe una trayectoria de Euler de A a B. Una de dichas trayectorias es

$$AGHFEIHEKJDCB.$$

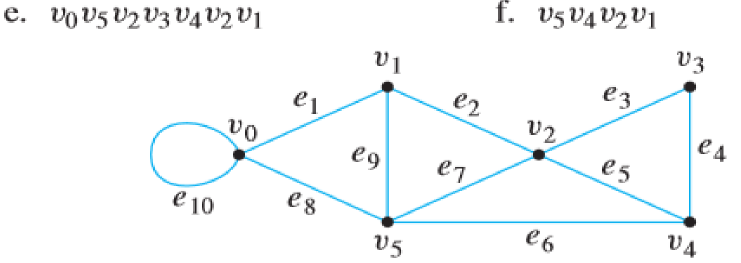
1. En el grafo siguiente, determine si los caminos siguientes son senderos, trayectorias, caminos cerrados, circuitos, circuitos simples o caminos simples.

a. $v_0e_1v_1e_{10}v_5e_9v_2e_2v_1$
b. $v_4e_7v_2e_9v_5e_{10}v_1e_3v_2e_9v_5$
c. v_2
d. $v_5v_2v_3v_4v_4v_5$
e. $v_2v_3v_4v_5v_2v_4v_3v_2$
f. $e_5e_8e_{10}e_3$

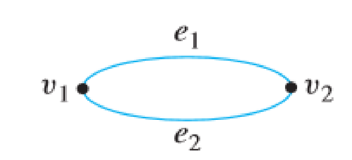


2. En el grafo siguiente, determine si los caminos siguientes son senderos, rutas, caminos cerrados, circuitos, circuitos simples o caminos simples.

a. $v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_2e_2v_1e_1v_0$
b. $v_2v_3v_4v_5v_2$
c. $v_4v_2v_3v_4v_5v_2v_4$
d. $v_2v_1v_5v_2v_3v_4v_2$
e. $v_0v_5v_2v_3v_4v_2v_1$
f. $v_5v_4v_2v_1$



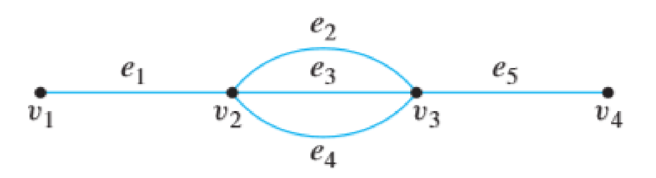
3. Sea G el grafo



y considere el camino $v_1e_1v_2e_2v_1$.

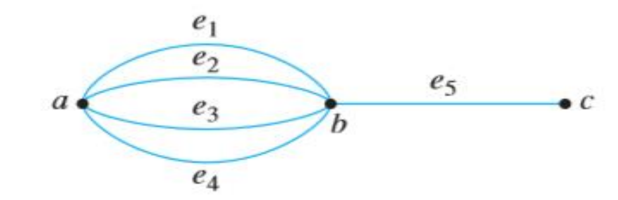
a. ¿Este camino se puede escribir sin ambigüedades como $v_1v_2v_1$? ¿Por qué?
b. ¿Este camino se puede escribir sin ambigüedades como e_1e_2? ¿Por qué?

4. Considere la siguiente gráfica.



a. ¿Cuántas trayectorias existen de v_1 a v_4?
b. ¿Cuántos senderos existen de v_1 a v_4?
c. ¿Cuántos caminos existen de v_1 a v_4?

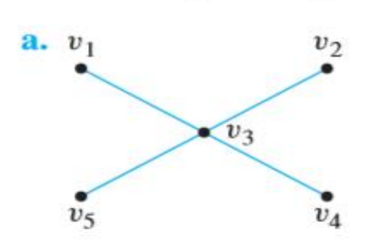
5. Considere el siguiente grafo.



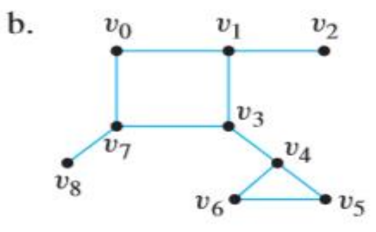
a. ¿Cuántas trayectorias hay de a a c?
b. ¿Cuántos senderos existen de a a c?
c. ¿Cuántos caminos existen de a a c?

6. Una arista cuya eliminación desconecta a la gráfica de la que es parte se llama un **puente**. Encuentre todos los puentes para cada uno de los siguientes grafos.

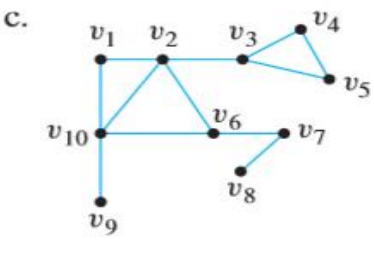
a.



b.

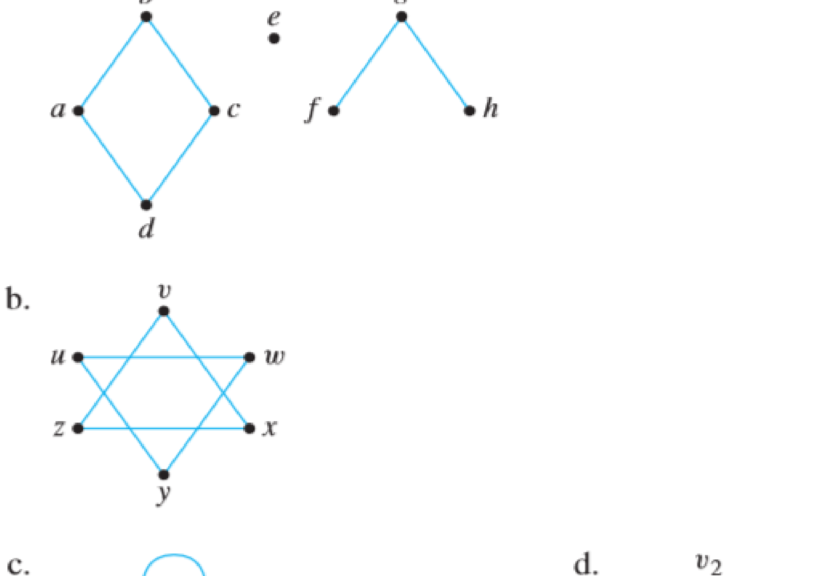


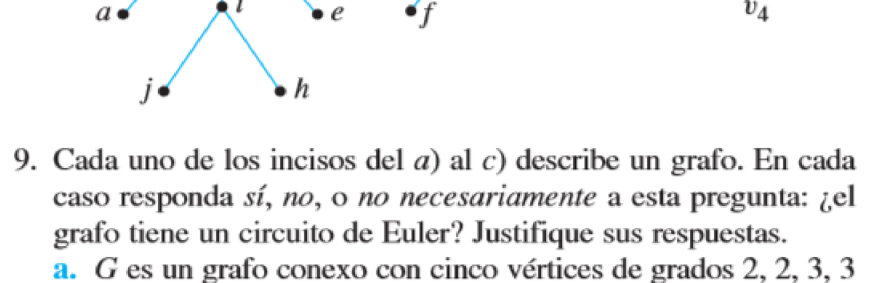
c.



7. Dado cualquier entero positivo *n*, *a*) encuentre un grafo conexo con *n* aristas tal que la eliminación de una arista desconecte la gráfica; *b*) encuentre un grafo conexo con *n* aristas que no se pueda desconectar por la eliminación de cualquier arista.

8. Encuentre el número de componentes conectados de cada uno de los siguientes grafos.





9. Cada uno de los incisos del *a*) al *c*) describe un grafo. En cada caso responda *sí*, *no*, o *no necesariamente* a esta pregunta: ¿el grafo tiene un circuito de Euler? Justifique sus respuestas.

a. *G* es un grafo conexo con cinco vértices de grados 2, 2, 3, 3 y 4.

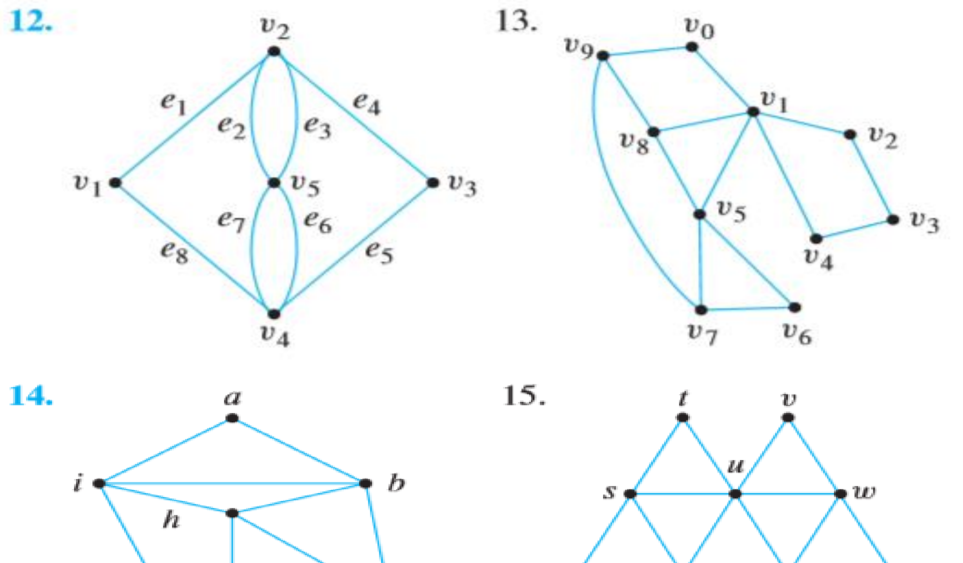
b. *G* es un grafo conexo con cinco vértices de grados 2, 2, 4, 4 y 6.

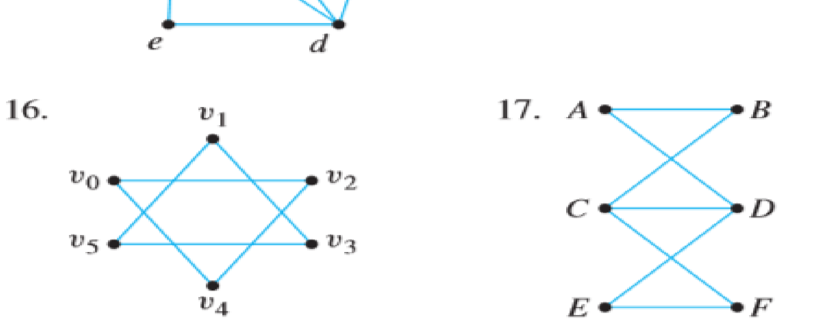
c. *G* es un grafo con cinco vértices de grados 2, 2, 4, 4 y 6.

10. La solución del ejemplo 10.2.5 muestra un grafo para que cada vértice tenga grado par, pero que no tiene un circuito de Euler. Dé otro ejemplo de un grafo que satisfaga estas propiedades.

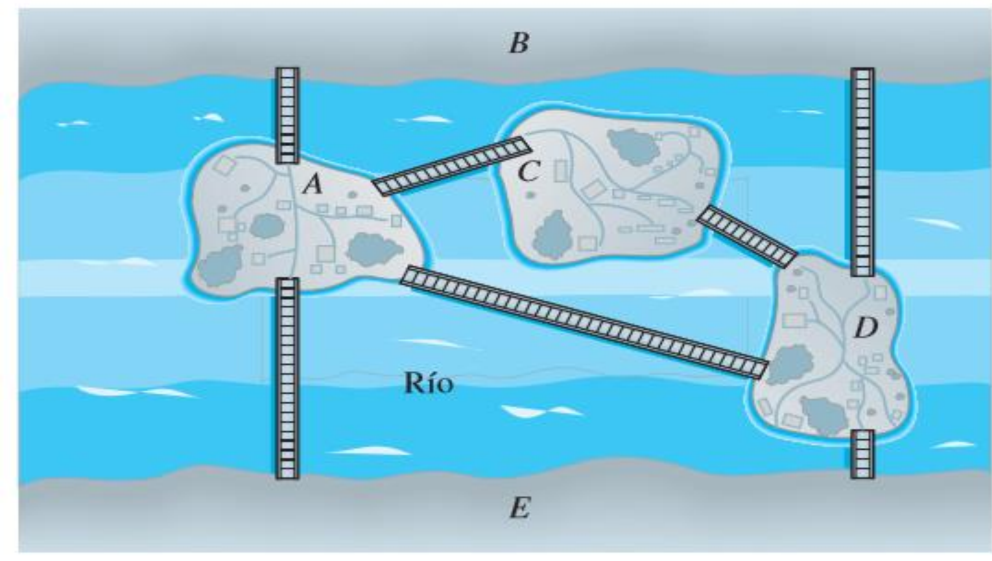
11. ¿Es posible para un ciudadano de Königsberg realizar un recorrido por la ciudad y cruzar cada puente exactamente dos veces? (Vea la figura 10.2.1.) ¿Por qué?

Determine cuál de los grafos en 12-17 tienen circuitos de Euler. Si el grafo no tiene un circuito de Euler, explique por qué no. Si tiene un circuito de Euler, describa uno.

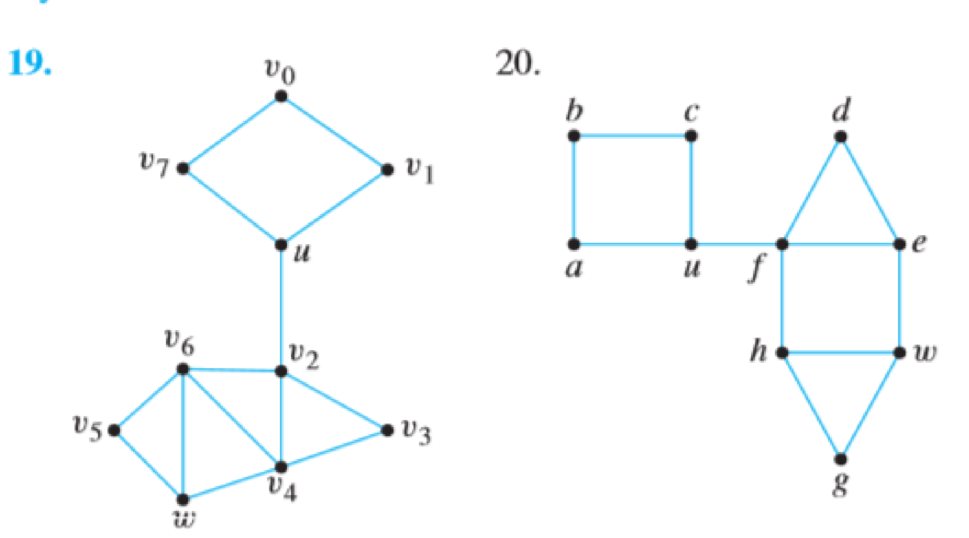




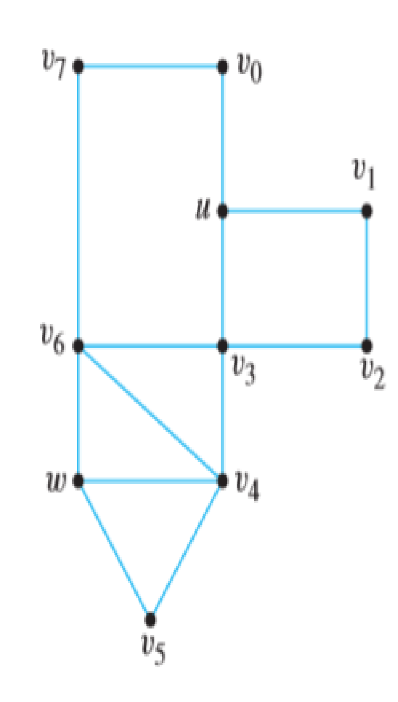
18. ¿Es posible hacer un camino alrededor de la ciudad cuyo mapa se muestra a continuación, comenzando y terminando en el mismo punto y cruzando cada puente exactamente una vez? Si es así, ¿cómo puede hacerse?



Para cada uno de los grafos en los ejercicios del 19 al 21, determine si hay una trayectoria de Euler de u a w. Si existe, encuentre dicha trayectoria.



21.



22. El siguiente es mapa de la planta de una casa. ¿Es posible entrar en la casa en el cuarto A, viajar a cada puerta interior de la casa exactamente una sola vez y salir por el cuarto E? Si es así, ¿cómo puede hacerse?

